关于行列式对其元素的连续性的一些思考

泉州师范学院 赖宝锋

2024年11月15日

理论基础

设$D=|a_{ij}|_{n\times n}$, 则

$$D=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

从表达式来看, 行列式D是其元素的连续函数. 这是一个不起眼的事实, 但我们却可利用这个事实论证很多结论.

矩阵列的收敛性

设$\{A_k\}=\left\{\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{m\times n}\right\}$为一个$m\times n$阶的矩阵列, 如果存在一个$m\times n$ 阶矩阵$A=(a_{ij})$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}a_{ij}^{(k)}=a_{ij}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n,$$

则称矩阵列$\{A_k\}$收敛.

矩阵列收敛的加减乘法则

容易验证, 矩阵列收敛也有相应的加法,减法,乘法法则, 即设$\{A_k\}$, $\{B_k\}$为$m \times n$阶收敛的矩阵列, $\{C_k\}$为$n \times l$阶收敛的矩阵列, 则

$$\lim_{k\to\infty}(A_k \pm B_k) = \lim_{k\to\infty} A_k \pm \lim_{k\to\infty} B_k,$$

$$\lim_{k\to\infty}(A_k C_k) = \lim_{k\to\infty} A_k \lim_{k\to\infty} C_k.$$

矩阵没有除法的概念, 但却有逆的概念. 为了验证求逆运算具有连续性, 我们先要建立伴随运算的连续性.

理论基础

伴随运算的连续性

设A为n阶矩阵，$A^* = (A_{ji})$，而$A_{j,i}$是A的元素的连续函数，因此，$\varphi(A) = A^*$为连续映射，故$(A^*)^* = \varphi(\varphi(A))$也是连续映射，其意思是对任意矩阵列$A_k$，只要$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$，则

$$\lim_{k\to\infty} A_k^* = A^*, \lim_{k\to\infty} (A_k^*)^* = (A^*)^*.$$

由此就得到求逆运算的连续性.

求逆运算的连续性

设可逆矩阵列$\{A_k\}$收敛于可逆矩阵A，则

$$\lim_{k\to\infty} A_k^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{A_k^*}{|A_k|} = \frac{A^*}{|A|} = A^{-1}.$$

理论基础

任何一个数总可以用一个非零的数列来逼近. 我们类似地建立如下核心的结论:

核心结论

设A为数域P上的n阶矩阵, 则存在P上的n阶可逆矩阵列$\{A_k\}$, 使得$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$.

证明:

若A为可逆矩阵, 取$A_k = A$即可.

若A为幂零矩阵, 取$A_k = A + \frac{E_n}{k}$, 则$\{A_k\}$为数域P上的n阶可逆矩阵列, 使得$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$.

理论基础

证明:

若A既不是可逆矩阵, 也不是幂零矩阵, 则其既有零特征值, 也有非零特征值. 设非零特征值的模中最小的一个为c, 任取P上正常数$N > \frac{1}{c} - 1$, 取$A_k = A + \frac{E_n}{k+N}$, 则$\{A_k\}$为数域$P$上的$n$阶可逆矩阵列, 使得$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$.■

为了便于把行列式对元素的连续性应用行列式的计算, 我们再建立如下简单的结论:

设行列式D为$x_1, x_2, \cdots, x_k$的连续函数, 且存在连续函数$g(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, 使得$x_j \neq x_j^{(0)}, j = 1, 2, \cdots, k$时, $D = g(x_1, x_2, \cdots, x_k)$成立, 则$D = g(x_1, x_2, \cdots, x_k)$恒成立.

理论基础

证明:

任取$g(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, 都存在数列$\left\{x_j^{(l)}\right\}$, 使得$x_j^{(l)} \neq x_j^{(0)}$, 且

$$\lim_{l \to \infty} x_j^{(l)} = x_j, j = 1, 2, \cdots, k,$$

故

$$D(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \lim_{l \to \infty} D(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \cdots, x_k^{(l)}) \\ = \lim_{l \to \infty} g(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \cdots, x_k^{(l)}) = g(x_1, x_2, \cdots, x_k).$$ ■

我将用分析的方法来解决代数问题的办法称为**分析手段**. 上面论述建立了分析手段的理论基础. 以下进行一些简单应用.

应用1 计算行列式

例1. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & & \\ c_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

解答:
若$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$, 则

$$D=\begin{vmatrix} a_0-\frac{b_1}{a_1}c_1-\frac{b_2}{a_2}c_2-\cdots-\frac{b_n}{a_n}c_n & & & & \\ c_1 & a_1 & & & \\ c_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

应用举例

$$
\begin{aligned}
&= (a_0 - \frac{b_1}{a_1}c_1 - \frac{b_2}{a_2}c_2 - \cdots - \frac{b_n}{a_n}c_n)a_1a_2\cdots a_n \\
&= a_0a_1a_2\cdots a_n - \sum_{i=1}^{n} a_1\cdots a_{i-1}b_ic_ia_{i+1}\cdots a_n.
\end{aligned}
$$

最后一式是$a_1, a_2, \cdots, a_n$的连续函数, 而D也是$a_1, a_2, \cdots, a_n$的连续函数, 故

$$
D = a_0a_1a_2\cdots a_n - \sum_{i=1}^{n} a_1\cdots a_{i-1}b_ic_ia_{i+1}\cdots a_n
$$

恒成立.$\blacksquare$.

应用2 证明行列式相关性质

例2. 设A,B,C,D为n阶矩阵, $AC=CA$,

令$G=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. 证明:

$$|G|=|AD-CB|.$$

证明:

若A可逆, 则

$$|G|=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A|\left|D-CA^{-1}B\right|$$

$$=\left|A(D-CA^{-1}B)\right|=\left|AD-ACA^{-1}B\right|$$

$$=\left|AD-CAA^{-1}B\right|=\left|AD-CB\right|$$

应用举例

对于一般情形, 取可逆矩阵列$A_k = A + \frac{E}{k+N}$, 其中, N为充分大的正常数, 使得A_k总是可逆的, 且$A_kC = CA_k$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, 故

$$|G| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \lim_{k\to\infty} \begin{vmatrix} A_k & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

$$= \lim_{k\to\infty} |A_kD - CB| = |AD - CB|. \blacksquare$$

应用3. 伴随矩阵相关问题

例3 设A为$n>1$阶行列式，证明$|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明:

若A可逆，则$A^*=|A|\,A^{-1}$，故$|A^*|=\frac{|A|^n}{|A|}=|A|^{n-1}$.

对于一般的情形，取可逆矩阵列$\{A_k\}$，使得$\lim\limits_{k\to\infty}A_k=A$，则$\lim\limits_{k\to\infty}A_k^*=A^*$，故

$$|A^*|=\lim_{k\to\infty}|A_k^*|=\lim_{k\to\infty}|A_k|^{n-1}=|A|^{n-1}.\blacksquare$$

应用4 伴随还原阵问题

伴随还原阵定义

设A, B为$n > 1$阶矩阵, 若$A = B^*$, 则称B为A的一个**伴随还原阵**.

并非任何矩阵都有伴随还原阵. 设B为$n > 1$阶矩阵, 则

$$r(B^*) = \begin{cases} n, r(B) = n \\ 1, r(B) = n-1 \\ 0, r(B) < n-1 \end{cases}$$

因此, 若A有伴随还原阵,则其秩只能是$0, 1, n$中的一个.

应用举例

若A的秩为n或0, 则其伴随还原阵都好求. 以下只假设$r(A)=1$. 我们来给出其一个简捷易算的伴随还原阵.

$r(A)=1$, 因此, 存在n维非零列向量u,v, 使得$A=uv^T$. 取$B=a+buv^T$, 其中, $a\neq 0, a+bv^Tu\neq 0$, 于是, B可逆, 且其逆为

$$B^{-1}=\left[a(E_n+\frac{b}{a}uv^T)\right]^{-1}=\frac{1}{a}(E_n-\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}v^Tu}uv^T)$$
$$=\frac{1}{a}(E_n-\frac{b}{a+bv^Tu}uv^T).$$

故

$$B^*=|B|\,B^{-1}=a^{n-1}(a+bv^Tu)\frac{1}{a}(E_n-\frac{b}{a+bv^Tu}uv^T)$$
$$=a^{n-2}\left[(a+bv^Tu)E_n-buv^T\right].$$

应用举例

取$a=-bv^Tu$,则

$$\begin{aligned} B^* &= -a^{n-2}buv^T = -(-bv^Tu)^{n-2}buv^T \\ &= (-b)^{n-1}(v^Tu)^{n-2}uv^T \end{aligned}.$$

$v^Tu \neq 0$, 即$tr(A) \neq 0$, 取

$$b = -\frac{1}{\sqrt[n-1]{[tr(A)]^{n-2}}},$$

$$a = -bv^Tu = \frac{tr(A)}{\sqrt[n-1]{[tr(A)]^{n-2}}} = \sqrt[n-1]{tr(A)},$$

$$B = aE_n + buv^T = \sqrt[n-1]{tr(A)}E_n - \frac{uv^T}{\sqrt[n-1]{[tr(A)]^{n-2}}}$$

$$= \sqrt[n-1]{tr(A)}\left[E_n - \frac{A}{tr(A)}\right].$$

应用举例

则$A = B^*$. 例如, 令$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 取

$$B = \sqrt{tr(A)}\left[E_3 - \frac{A}{tr(A)}\right] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

则$A = B^*$.

应用5 矩阵特征值性质

例4. (AB与BA问题) 设A, B为n阶矩阵, 则AB与BA有相同的特征多项式.

证明:

若A可逆, 则$BA = A^{-1}(AB)A \sim AB$, 故

$$|\lambda E_n - AB| = |\lambda E_n - BA|\,.$$

若A不可逆, 取可逆矩阵列A_k, 使得$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, 故

$$\begin{aligned} |\lambda E_n - AB| &= \lim_{k\to\infty} |\lambda E_n - A_k B| \\ &= \lim_{k\to\infty} |\lambda E_n - BA_k| = |\lambda E_n - BA| \end{aligned}.\blacksquare$$

应用举例

由此, $|E_n - AB| = |E_n - BA|$, 故$E_n - AB$可逆等价于$E_n - BA$可逆.

我们进一步问: 如果用$(E_n - AB)^{-1}$表示$(E_n - BA)^{-1}$? 这个问题依然可以用分析手段解决.

若A可逆, 则

$$E_n - BA = E_n - A^{-1}(AB)A = A^{-1}(E_n - AB)A,$$

故

$$\begin{aligned}(E_n - BA)^{-1} &= A^{-1}(E_n - AB)^{-1}A \\ &= A^{-1}(E_n - AB + AB)(E_n - AB)^{-1}A. \\ &= E_n + B(E_n - AB)^{-1}A\end{aligned}$$

应用举例

若A不可逆, 取可逆矩阵列A_k, 使得$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, 故

$$\begin{aligned}(E_n - BA)^{-1} &= \lim_{k\to\infty}(E_n - BA_k)^{-1}\\ &= \lim_{k\to\infty}\left[E_n + B(E_n - A_kB)^{-1}A_k\right]\\ &= E_n + B(E_n - AB)^{-1}A\end{aligned}.$$

甚至我们还可以用幂级数进行形式推导:

$$\begin{aligned}(E_n - BA)^{-1} &= E_n + \sum_{k=1}^{\infty}(BA)^k\\ &= E_n + B\left[\sum_{k=1}^{\infty}(AB)^{k-1}\right]A\\ &= E_n + B(E_n - AB)^{-1}A\end{aligned}.$$

应用举例

例5. (伴随矩阵的特征值) 设A为n阶矩阵, 特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 求$A^*$的特征值.

解答:

若A可逆, 则$A^* = |A|\, A^{-1}$的特征值为

$$\frac{|A|}{\lambda_j} = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{\lambda_j} = \lambda_1\cdots\lambda_{j-1}\lambda_{j+1}\cdots\lambda_n, j = 1, 2, \cdots, n,$$

即

$$|\lambda E - A^*| = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_1\cdots\lambda_{j-1}\lambda_{j+1}\cdots\lambda_n).$$

若A不可逆, 取可逆矩阵列$A_k = A + \frac{E_n}{k+N}$, 其中, N为充分大的正常数, 使得A_k总是可逆的, 于是, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, 其特征值为

应用举例

$$\lambda_j + \frac{1}{k+N}, j = 1, 2, \cdots, n$$

于是,

$$|\lambda E - A^*| = \lim_{k\to\infty} |\lambda E - A_k^*|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left[\lambda - \prod_{i=1, i\neq j}^{n} (\lambda_i + \frac{1}{k+N})\right].$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\lambda - \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \lambda_i\right)$$

因此, A^*的特征值为 $\prod_{i=1, i\neq j}^{n} \lambda_i, j = 1, 2, \cdots, n.$■

应用举例

不仅如此, A的特征向量也依然是A^*的特征向量.

事实上, 若A可逆, 任取A的特征值λ_j, 设x为相应的特征向量, 则$Ax = \lambda_j x$, 故$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda_j}x$, 故

$$A^*x = |A|\,A^{-1}x = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{\lambda_j}x = \prod_{i=1,i\neq j}^{n} \lambda_i \cdot x.$$

若A不可逆, 取可逆矩阵列$A_k = A + \frac{E_n}{k+N}$, 其中, N为充分大的正常数, 使得A_k总是可逆的, 于是, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, x为A_k的特征值$\lambda_j + \frac{1}{k+N}$对应的特征向量. 因此,

$$A^*x = \lim_{k\to\infty} A_k^*x = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1,i\neq j}^{n} (\lambda_i + \frac{1}{k+N})\cdot x = \prod_{i=1,i\neq j}^{n} \lambda_i\cdot x.$$

应用举例

如果A可逆, 则其逆可表为A的多项式. 因此, 若A可逆, 则A^*也可表为A的多项式. 因此, 我们猜测对于一般的$n>1$阶矩阵A, A^* 也可以表为A的多项式.

例6. A为$n>1$阶矩阵, 证明:A^*可表为A的多项式.

证明:

若A可逆, 设

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$$

为A 的特征多项式. 其中, $a_{n-k}=(-1)^k b_k, k=1,2,\cdots,n$, b_k是A的所有k阶顺序主子式的和.

应用举例

由于A可逆, 故$a_0 = f(0) = |-A| \neq 0$. 由哈密尔顿-凯莱定理, $f(A) = 0$, 即

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_2A^2 + a_1A + a_0E_n = 0,$$

即

$$A(-\frac{A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1E_n}{a_0}) = E_n.$$

故

$$A^{-1} = -\frac{A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1E_n}{a_0}.$$

应用举例

因此,

$$A^* = |A|\,A^{-1} = -|A|\,\frac{A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 E_n}{|-A|}.$$
$$= (-1)^{n-1}\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 E_n\right)$$

若A不可逆, 取可逆矩阵列A_k, 使得$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, 设其特征多项式为

$$f_k(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}^{(k)}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1^{(k)}\lambda + a_0^{(k)},$$

其中, $a_{n-j}^{(k)} = (-1)^j b_j^{(k)}$, 其中, $b_j^{(k)}$为A_k的所有j阶顺序主子式的和. 由于$\lim\limits_{n\to\infty} A_k = A$, 因此,

应用举例

$$\lim_{k\to\infty} a_{n-j}^{(k)} = (-1)^j \lim_{k\to\infty} b_j^{(k)} = (-1)^j \lim_{k\to\infty} b_j = a_{n-j},$$

因此,

$$\begin{aligned} A^* &= \lim_{k\to\infty} A_k^* \\ &= (-1)^{n-1}\left(A_k^{n-1} + a_{n-1}^{(k)} A_k^{n-2} + \cdots + a_2^{(k)} A_k + a_1^{(k)} E_n\right). \blacksquare \\ &= (-1)^{n-1}\left(A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 E_n\right) \end{aligned}$$

与二次型有关的最值问题

在高等代数中引入分析的方法解决问题的例子还有很多. 比如, 线性方程组$Ax=b$的最小二乘解的确定. 同样, 分析中一些关键问题的解决也常见高等代数的身影, 例如, 隐函数组的存在性定理, 重积分变量代换, 又如多元函数无条件极值的确定, 需要判断Hessian矩阵的正(负)定性.

以下用高等代数的Rayleigh商定理来解决一类二次型最值问题.

Rayleigh商定理 设A为n阶实对称矩阵, 则其Rayleigh商

$$R(x)=\frac{x^TAx}{x^Tx}, 0\neq x\in\mathbb{R}^n$$

最大最小值分别为

$$\max_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} R(x)=\lambda_{\max}(A), \min_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} R(x)=\lambda_{\min}(A).$$

与二次型有关的最值问题

当且仅当x为A的最大特征值所对应的特征向量，$R(x)$取得最大值；当且仅当x为A的最小特征值所对应的特征向量，$R(x)$取得最小值.

由此，对任意$r>0$，x^TAx在圆周$|x|=r$上的最大值为$\lambda_{\max}(A)r^2$，最小值为$\lambda_{\min}(A)r^2$.

x^TAx在圆域$B_K(0)=\{x\in\mathbb{R}^n\,||x|\leqslant K\}$的最大值为

$$\max_{x\in B_K(0)} x^TAx = \max_{r\in[0,K]}\max_{|x|=r} x^TAx = \max_{r\in[0,K]} \lambda_{\max}(A)r^2$$
$$= \begin{cases} \lambda_{\max}(A)K^2, \lambda_{\max}(A)\geqslant 0 \\ 0, \lambda_{\max}(A)<0 \end{cases},$$

与二次型有关的最值问题

最小值为

$$\min_{x\in B_K(0)} x^T Ax = \min_{r\in[0,K]} \min_{|x|=r} x^T Ax = \min_{r\in[0,K]} \lambda_{\min}(A)r^2$$
$$= \begin{cases} 0, \lambda_{\min}(A) \geqslant 0 \\ \lambda_{\min}(A)K^2, \lambda_{\min}(A) < 0 \end{cases}.$$

例7. 求函数$f(x,y) = x^2 + xy - 2y^2$在闭区域

$$D = \left\{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leqslant 9\right\}$$

的最大值与最小值.

解答:

取$x=u, y=\frac{1}{2}v$, 则区域变为

$$D^{*}=\left\{(u,v):u^{2}+v^{2}\leqslant 9\right\},$$

函数化为

$$f(x,y)=u^{2}+\frac{1}{2}uv-\frac{1}{2}v^{2}=g(u,v).$$

二次型$g(u,v)$的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, A的特征值为$\frac{1+\sqrt{10}}{4}>0$, $\frac{1-\sqrt{10}}{4}<0$, 因此,

与二次型有关的最值问题

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \max_{(u,v)\in D^*} g(u,v) = \frac{9(1+\sqrt{10})}{4},$$

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = \min_{(u,v)\in D^*} g(u,v) = \frac{9(1-\sqrt{10})}{4}. \blacksquare$$

感谢倾听，请多指教！